XII

Concursul Național de Matematică şi Fizică
"Vrănceanu – Procopiu"
17 noiembrie 2018
MATEMATICĂ

Problema I (10 puncte)

Fie a un număr real pozitiv; considerăm funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+a}$. Calculați $\int f(x)\mathrm{d}x$, $x\in(0,+\infty)$.

Soluție.

Notăm $u(x)=x^2+x+1$; atunci $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u^2(x)+(a-1)}$ (cum $u(x)>1,\forall x\in(0,\infty)$ şi $a-1>-1$, este evident că numitorul fracției nu se poate anula). **(3p)**

Dacă $a\in(0,1)$, atunci $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2\sqrt{1-a}}\ln\dfrac{u(x)-\sqrt{1-a}}{u(x)+\sqrt{1-a}}+\mathcal{C}$. **(2p)**

Dacă $a=1$, atunci $\int f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{u(x)}+\mathcal{C}$. **(2p)**

Dacă $a\in(1,+\infty)$, atunci $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}\operatorname{arctg}\dfrac{u(x)}{\sqrt{a-1}}+\mathcal{C}$. **(2p)**

Problema a II-a (10 puncte)

a) Determinați elementele de ordinul 2 ale grupului de permutări $(S_5,\cdot)$; câte asemenea elemente există?

b) Notăm cu a_n numărul elementelor de ordinul 2 ale grupului $(S_n,\cdot)$, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Stabiliți o relație de recurență care să permită calculul lui a_{n+1} în funcție de a_n şi a_{n-1}, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Soluție.

a) Fie $x\neq e$ o permutare pentru care $x^2=e$. În scrierea lui x ca produs de cicli disjuncți nu pot apărea cicli având lungimea mai mare decât 2, aşadar x poate fi transpoziție sau produs de două transpoziții disjuncte. **(2p)**

Avem $C_5^2+\dfrac{1}{2}C_5^2\cdot C_3^2=10+15=25$ elemente de ordinul 2 în S_5. **(2p)**

b) Elementele x de ordinul 2 din S_{n+1} au una dintre formele:

1. $x=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n & n+1\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) & n+1\end{pmatrix}$, unde $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$ este element de ordinul 2 din S_n;

2. $x=\begin{pmatrix}1 & \dots & j & \dots & n & n+1\\ \sigma(1) & \dots & n+1 & \dots & \sigma(n) & j\end{pmatrix}$, unde σ defineşte natural o soluție în S_{n-1} a ecuației $x^2=e$. **(2p)**

Există a_n permutări de tipul 1 şi $n(a_{n-1}+1)$ permutări de tipul 2. În concluzie, $a_{n+1}=a_n+na_{n-1}+n$, oricare ar fi numărul natural $n\geq 2$. **(3p)**