X

Concursul Național de Matematică şi Fizică

"Vrănceanu – Procopiu"

17 noiembrie 2018

MATEMATICĂ

Problema I (10 puncte)

Se consideră numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, având produsul egal cu 3^n.

a) Demonstrați că $\log_{a_1} 3 + \log_{a_2} 3 + \ldots + \log_{a_n} 3 \geq n.$

b) Determinați numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$, știind că $\log_{a_1}(2a_1 - 3) + \log_{a_2}(2a_2 - 3) + \ldots + \log_{a_n}(2a_n - 3) = n$.

Soluție.

a) Folosind inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică, obținem că $\log_{a_1} 3 + \log_{a_2} 3 + \ldots + \log_{a_n} 3 \geq$
$\geq \dfrac{n^2}{\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \ldots + \log_3 a_n} = \dfrac{n^2}{\log_3 a_1 a_2 \ldots a_n} = n$. **(3p)**

b) Cum $(x-3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $2x - 3 \leq \dfrac{x^2}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x \in \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$, deducem că $\log_x(2x-3) \leq 2 -$
$- \log_x 3$, cu egalitatea dacă şi numai dacă $x = 3$. **(3p)**

Ținând cont de această inegalitate, precum şi de punctul precedent, obținem că $\log_{a_1}(2a_1 - 3) + \log_{a_2}(2a_2 - 3) + \ldots +$
$+ \log_{a_n}(2a_n - 3) \leq 2n - (\log_{a_1} 3 + \ldots + \log_{a_n} 3) \leq n$. În cazul nostru se atinge egalitatea, aşadar $a_i = 3, \forall i = \overline{1,n}$. **(3p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ având proprietatea

$$x \cdot f(x+y) + y \cdot f(y-x) = f^2(x) + f^2(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluție.

Pentru $x = y = 0$, obținem $f(0) = 0$. Luând $y = 0$, avem $f(x) \cdot (f(x) - x) = 0$, deci $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$. **(2p)**

Evident, $0 \in A$; urmărim să determinăm mulțimea *A*. Dacă $A = \{0\}$, atunci $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, funcție care verifică ipoteza problemei. **(1p)**

Dacă $A \neq \{0\}$, atunci există un număr real nenul *a* pentru care $f(a) = 0$. Vom dovedi că $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, funcție care verifică, şi ea, ipoteza problemei; în concluzie, ecuația funcțională dată va admite două soluții. **(1p)**

Luând $y = x$, apoi $y = -x$ în relația din enunț, obținem $xf(2x) = 2f^2(x)$, respectiv $-xf(-2x) = f^2(x) + f^2(-x)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Deducem că $f^2(x) = f^2(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Trecem în ecuația inițială pe *x* în $-x$: $-x \cdot f(y-x) +$
$+ y \cdot f(y+x) = f^2(-x) + f^2(y) = f^2(x) + f^2(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Reducem $f(y-x)$ între ultima relație şi cea din ipoteză, obținând $(x^2 + y^2) \cdot f(x+y) = (x+y) \cdot (f^2(x) + f^2(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Pentru $y = a - x$, ultima egalitate devine $a\left(f^2(x) + f^2(a-x)\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **(5p)**