MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU

COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică şi Fizică

"Vrănceanu – Procopiu"

17 noiembrie 2018

MATEMATICĂ

XI

Problema I (10 puncte)

Fie $a \in \mathbb{R}^*$; considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \dfrac{a+3}{4}$, iar $x_{n+1} = \dfrac{a+3x_n^4}{4x_n^3}, \forall n \geq 1$. Arătați că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limită dacă şi numai dacă este monoton.

Soluție.

Orice şir monoton are limită, deci afirmația reciprocă este adevărată. **(1p)**

Presupunem acum că şirul are limită; fie α limita sa. Dacă, prin absurd, $\alpha = +\infty$, atunci şirul ar avea termenii pozitivi de la un loc încolo şi $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{a}{x_n^4} + \dfrac{3}{4} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{3}{4}$. Astfel, şirul ar fi descrescător de la un loc încolo, fapt care contrazice ipoteza $\alpha = +\infty$. Analog, se ajunge la o contradicție şi dacă presupunem că $\alpha = -\infty$. În concluzie, $\alpha \in \mathbb{R}$. **(3p)**

Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $\alpha^4 = a$, prin urmare $a > 0$ şi $\alpha = \sqrt[4]{a}$. **(1p)**

Notăm $b = \sqrt[4]{a}$. Dacă $x_1 = b$, vom avea $b^4 - 4b + 3 = 0$, sau $(b-1)^2(b^2+2b+3) = 0$, deci $b = 1$, adică $a = 1$. În acest caz, obținem imediat că şirul este constant 1, deci este monoton. **(1p)**

Fie acum $a \neq 1$. Ipoteza $x_1 < b$ conduce la $(b-1)^2(b^2+2b+3) < 0$, fals. Rămâne că $x_1 > b$, de unde, prin inducție, $x_n > b, \forall n \geq 1$. Avem că $x_{n+1} = \dfrac{a+3x_n^4}{4x_n^3} = \dfrac{a - x_n^4}{4x_n^3} + x_n < x_n, \forall n \geq 1$, aşadar şirul e monoton descrescător. **(3p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Fie $p, q \geq 2$ două numere naturale prime între ele şi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că A^p şi A^q au toate elementele numere reale.

a) Dați un exemplu de matrice A care nu are toate elementele reale şi are proprietatea din enunț.

b) Dacă $A^2 \neq O_2$, demonstrați că A are toate elementele numere reale.

Soluție.

a) Dacă $A = \begin{pmatrix} i & i \\ -i & -i \end{pmatrix}$, atunci $A^2 = O_2$, prin urmare $A^p = A^q = O_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **(2p)**

b) Deoarece p şi q sunt prime între ele, există numerele întregi m şi n astfel încât $mp + nq = 1$. Evident, m şi n au semne contrare, deci putem presupune că $n = -k, k \in \mathbb{N}^*$. **(1p)**

Dacă $d = \det A = 0$, cum $A^2 \neq O_2$, rezultă că $t = \operatorname{tr} A \neq 0$. Avem că $\operatorname{tr} A^p = \operatorname{tr}\left(t^{p-1}A\right) = t^p \in \mathbb{R}$, deoarece A are elemente reale; analog, $t^q \in \mathbb{R}$. Deducem că $t = t^{mp+nq} = \left(t^p\right)^m \cdot \left(t^q\right)^n \in \mathbb{R}^*$. Astfel, $A = t^{1-p}A^p \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **(3p)**

Fie acum $d \neq 0$. Avem că $A^{mp} = A^{1+kq}$, deci $B = AC$, unde $B = \left(A^p\right)^m, C = \left(A^q\right)^k$ sunt matrice cu elemente reale. Cum $\det C = d^{kq} \neq 0$, matricea C este inversabilă, cu $C^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Rezultă că $A = BC^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **(3p)**