MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU

COLEGIUL NAȚIONAL “FERDINAND I” – BACĂU

IX

Concursul Național de Matematică şi Fizică

“Vrănceanu – Procopiu”

17 noiembrie 2018

MATEMATICĂ

Problema I (10 puncte)

Se consideră triunghiul ABC, având centrul de greutate G. Fie S un punct în planul triunghiului, $S \neq G$; notăm cu D, E, respectiv F simetricele punctului S față de mijloacele M, N şi P ale laturilor BC, CA, respectiv AB. Demonstrați că dreptele AD, BE, CF şi SG sunt concurente.

Soluție.

În raport cu o origine arbitrară, vectorul de poziție al punctului D este $\overrightarrow{r_D} = 2\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_S} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_S}$. Vectorul de poziție al unui punct arbitrar X de pe dreapta AD este $\overrightarrow{r_X} = (1-t)\overrightarrow{r_A} + t\overrightarrow{r_D} = (1-t)\overrightarrow{r_A} + t\overrightarrow{r_B} + t\overrightarrow{r_C} - t\overrightarrow{r_S}, t \in \mathbb{R}$. **(4p)**

Pentru $t = \frac{1}{2}$, avem $\overrightarrow{r_X} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_S}\right)$ şi se observă că acest punct aparține şi dreptelor BE şi CF. **(3p)**

În plus, $\overrightarrow{r_X} = \frac{3}{2}\overrightarrow{r_G} - \frac{1}{2}\overrightarrow{r_S} = \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\overrightarrow{r_G} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{r_S}$, aşadar $X \in SG$. **(2p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Dacă x, y şi z sunt numere reale pozitive având produsul egal cu 1, demonstrați că

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$

Soluție.

Decondiționăm inegalitatea, folosind substituțiile uzuale $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{a}, z = \frac{b}{c}$, unde $a,b,c \in (0,\infty)$. Inegalitatea de demonstrat devine $\frac{a^2}{bc} + \frac{c^2}{ab} + \frac{b^2}{ac} \geq \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a}$, sau $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$. **(4p)**

Ultima inegalitate se poate demonstra, de exemplu, folosind inegalitatea rearanjărilor pentru tripletele la fel ordonate (a,b,c) şi (a^2,b^2,c^2). **(5p)**